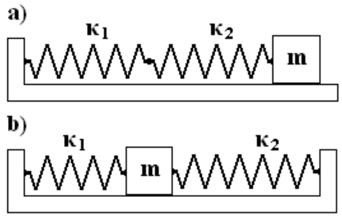
10. Hausübung zur Physik I Abgabe: Di 16.12.08

Aufgabe 37: Ein gedämpfter Oszillator habe eine Kreisfrequenz von ω', die um 10 % kleiner ist als seine Kreisfrequenz ω_0 ohne Dämpfung. 3

a) Um welchen Faktor nimmt die Amplitude des Oszillators während jeder Schwingung ab?

b) Um welchen Faktor wird seine Energie während jeder Schwingung verringert?

Aufgabe 38: Eine Masse m ist in zwei verschiedenen Anordnungen mit zwei Federn (Federkonstanten κ_1 und κ_2) verbunden (siehe Abbildung). Zeigen Sie, dass die Perioden gegeben sind durch 2



a) $T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}\right)}$ und b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa_1+\kappa_2}}$.

Vernachlässigen Sie dabei die Reibung.

Aufgabe 39: Zu der anharmonischen Schwingung 5

$$\ddot{x} \;=\; \frac{6\omega^2}{a}\,x^2 \;-\; \frac{8\omega^2}{a^2}\,x^3 \qquad \text{mit} \qquad x(0) = a \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

sollen in einem Potenzreihenansatz $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \ldots$ die Koeffizienten c_0 bis c_5 bestimmt werden.

Wenn Sie die Reihe zuerst in die Anfangsbedingungen einsetzen und sodann $\ddot{x}$ bilden, dann können Sie auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung ziemlich faul werden. Das x–Resultat bis $O(t^5)$ läßt *erraten*, wie die geschlossene Form für $x(t)$ aussieht (Probe!). Bilden und skizzieren Sie das Potenzial $V(x)$ der obigen Kraft (für m=1) und geben die Energie E des Teilchens an. Wie lange braucht das Teilchen, um zum nächsten Umkehrpunkt zu gelangen? Welches Verhalten zeigt $x(t)$ für $t \to \infty$?

Man schließe aus diesem Beispiel bitte nicht, dass die Bewegungsgleichung für eine anharmonische Kraft immer exakt lösbar sei – dies geht hier nur wegen ganz speziell gewählter Anfangsbedingungen!

Aufgabe 40: Ein Teilchen (Masse m, Ladung q) rast auf der x–Achse von links mit großer Geschwindigkeit v_0 auf einen Raumbereich zu, in dem das Magnetfeld $\vec{B} \doteq (0, 0, B)$ herrscht. Eintritt bei $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Nun sagt jemand: „Ich weiß ja, daß $\vec{r}^{(0)}(t) \doteq (v_0 t, 0, 0)$ eine gute nullte Näherung ist, also setze ich letztere in die Lorentzkraft ein, um diese zu einer Funktion der Zeit zu machen. Damit löse ich die Bewegungsgleichung und nenne die Lösung $\vec{r}^{(1)}(t)$. Hiermit wiederhole ich das Iterationsverfahren und erhalte $\vec{r}^{(2)}(t)$. Dies sollte für kleines Magnetfeld bereits eine vernünftige Näherung sein.“ Bitte nachrechnen! 5

Andererseits beschreibt – angeblich – das Teilchen im Magnetfeld eine Kreisbahn, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird (mit welcher Kreisfrequenz ω und welchem Radius R ?). Wenn man nun das exakte Resultat für $\vec{r}(t)$ in Potenzen von B entwickelt, müßte eigentlich obiges Iterationsresultat wieder herauskommen!?

Erinnerung: Lorentzkraft ist $\vec{F} = q\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$; Kreisbahn ist $\vec{r}(t) \;\doteq\; (R\sin\omega t, -R{+}R\cos\omega t, 0)$.